Analízis 2.

Tantárgyi tájékoztató, 2026-27 őszi félév

Matematikatanár szakos hallgatók számára

Tisztelettel megkérek mindenkit, aki ezt a tantárgyat hallgatja a félévben, hogy figyelmesen olvassa át, és mentse el későbbi tanulmányozásra jelen tantárgyi tájékoztatót. A félév során nem áll módomban olyan emailekre válaszolni, amelyekre a válasz az itt leírtakból egyértelműen kiderül.

1. Kurzus adatai

Tantárgy neve (kódja):	Analízis 2. (PMT1301L)
Órák helye, ideje:	B183, csütörtök 14:30–17:00
Előadó:	Molnár Gábor Marcell ✉ molnar.gabor@nye.hu
Fogadóóra:	Péntek 11:30-12:00, B241 (emailben előzetes egyeztetés ajánlott)

2. Tematika

A differenciálhányados fogalma és szemléletes jelentései. Differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjai. Magasabb rendű differenciálhányadosok. A lokális tulajdonságok és a derivált kapcsolata. Középértéktételek. A differenciálható függvények vizsgálata. Szélsőérték-feladatok megoldása. Differenciálszámítás alkalmazása valóságközeli problémák megoldására. A L'Hospital-szabály. A primitív függvény fogalma. Primitívfüggvény-keresési módszerek (parciális integrálás, helyettesítéses integrálás), racionális törtfüggvények primitív függvényeinek keresése. A Riemann-integrál fogalma. Az integrálhatóság feltételei. Az integrál elemi tulajdonságai. A Newton–Leibniz-formula. Integrálszámításra vezető problémák, terület- és térfogatszámítás. Improprius integrál. Az analízis tantárgypedagógiai vonatkozásai.

3. Követelmények

A tantárgy (szóbeli) vizsgával zárul. A vizsga az otthon kidolgozott feladatsorból, a vizsgán kijelölt feladat(ok) szóbeli védéséből, valamint egy elméleti tétel megbeszéléséből áll. A feladatsor védésén a kapcsolódó fogalmak, tételek ismertetése is szükséges.

Differenciálszámítási feladat védése esetén a hallgató a B tételsorból, integrálszámítási feladat védése esetén az A tételsorból húz elméleti tételt. A feladat védésére és az elméleti tétel megbeszélésére egyenként legfeljebb 10 perc jut.

Alapfogalmak. Az alábbi alapismeretek a választott feladattól és a kihúzott tételtől függetlenül szükségesek. Ezek az érintett tételekben is szerepelnek.

- *Differenciahányados, differenciálhányados, differenciálhatóság.* A derivált geometriai és fizikai jelentése.
- *Magasabb rendű derivált,* különösen a második derivált.
- *Monotonitás, lokális és globális szélsőérték, stacionárius pont.*
- *Konvexitás, konkávitás, inflexiós pont.*
- *Primitív függvény, határozatlan integrál, integrálási állandó.*
- *A határozott integrál szemléletes tartalma:* integrálközelítő összegek és előjeles terület.

A tételsor – Differenciálszámítás

A1. Differenciálhatóság és lineáris approximáció. A differenciahányados, a differenciálhányados és a differenciálhatóság fogalma. Differenciálhatóság egy pontban és egy intervallumon. A derivált geometriai és fizikai jelentése: az érintő meredeksége és a pillanatnyi változási sebesség. Egyoldali differenciálhatóság. A lineáris approximáció és a közelítés hibájára vonatkozó feltétel. A differenciálhatóság és a lineáris approximálhatóság ekvivalenciája. A lineáris közelítés egyértelműsége. A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolata.

A2. Differenciálási szabályok és az inverzfüggvény-tétel. Az összetett függvény és az inverzfüggvény fogalma. Differenciálhatóság és műveletek: az összeg, a szorzat és a hányados deriválása. A láncszabály. Az inverzfüggvény-tétel. A szabályok feltételei és indoklása. Az elemi függvények deriváltjai. Alkalmazások az elemi és az ezekből származó függvényekre.

A3. Fermat-elv és középértéktételek. A lokális szélsőérték fogalma. A lokális szélsőérték szükséges feltétele: a Fermat-elv. A Rolle-, Lagrange- és Cauchy-féle középértéktétel. A tételek feltételei és egymáshoz való viszonya. A Rolle- és Lagrange-tétel geometriai jelentése.

A4. Darboux-tétel és a deriváltfüggvény szakadása. A deriváltfüggvény fogalma. Folytonosság és szakadási típusok. A differenciálszámítás Darboux-tétele. Következményei a deriváltfüggvény lehetséges szakadási típusaira. Példa nem folytonos deriváltfüggvényre.

A5. L'Hospital-szabályok. A $0/0$ és az ∞/∞ típusú határértékekre vonatkozó L'Hospital-szabályok. Az alkalmazhatóság feltételei. A $0/0$ típusú szabály indoklása véges határértékhelyen. Alkalmazások határértékek kiszámítására.

A6. Monotonitás és szélsőérték-vizsgálat. A monotonitás és a szigorú monotonitás fogalma. Lokális és globális szélsőérték, stacionárius pont. A monotonitás jellemzése az első deriválttal. A lokális szélsőérték elégséges feltétele a derivált előjelváltása alapján. A magasabb rendű deriváltak és a többszöri differenciálhatóság fogalma. Másodrendű és magasabb rendű szélsőérték-feltételek. Globális szélsőérték keresése zárt intervallumon. Az eredmények alkalmazása a függvényvizsgálatban és szélsőérték-feladatokban.

A7. Konvexitás és inflexió. A konvexitás, a konkávitás és az inflexiós pont fogalma. A konvexitás jellemzései. Konvex függvények regularitási tulajdonságai. A konvexitás jellemzése az első és a második deriválttal. Az inflexió szükséges feltétele. A második derivált előjelének szerepe az inflexió vizsgálatában. Az eredmények alkalmazása a függvényvizsgálatban.

B tételsor – Integrálszámítás

B1. Primitív függvények és integrálási szabályok. A primitív függvény és a határozatlan integrál fogalma. Az integrálási állandó szerepe. A határozatlan integrálás alaptétele: a primitív függvények kapcsolata egy intervallumon. Linearitás. A parciális és a helyettesítéses integrálás szabályai és indoklásuk. A szabályok határozatlan és határozott alakja.

B2. Darboux-összegek és Darboux-integrálok. A felosztás, a finomítás, a finomság és a normális beosztássorozat fogalma. Alsó és felső integrálközelítő összegek: definíciójuk és tulajdonságaik. A finomítás hatása. Az alsó és felső Darboux-integrál fogalma és tulajdonságai. Intervallumadditivitás. Darboux tétele.

B3. A Riemann-integrál és elemi tulajdonságai. A szelekció, az integrálközelítő összeg és az oszcilláció fogalma. A Riemann-integrál és a Riemann-integrálhatóság definíciója. A határozott integrál geometriai jelentése; előjeles terület. Integrálhatósági kritériumok és elegendő feltételek. A Riemann- és Darboux-féle megközelítés kapcsolata. Linearitás, monotonitás és intervallumadditivitás. Az integrálszámítás középértéktétele.

B4. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma és alkalmazásai. A nullmértékűség fogalma és tulajdonságai. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma. Alkalmazások a Riemann-integrálható függvények főbb osztályaira. A Riemann-integrálhatóság és a függvényműveletek kapcsolata.

B5. Az improprius integrál. Integrálás nem korlátos intervallumon, illetve nem korlátos integrandus esetén. Az improprius integrál definíciója. Konvergencia és divergencia. Több improprius pont esetén az integrál felbontása és a határértékek külön vizsgálata. Egyszerű konvergenciavizsgálatok; hatványfüggvények improprius integráljai.

B6. Az integrálfüggvény és a Newton–Leibniz-tétel. A primitív függvény és az integrálfüggvény fogalma. A felsőhatár-függvény regularitási tulajdonságai. Differenciálás és integrálás kapcsolata. A Newton–Leibniz-tétel és feltételei. Primitív függvény létezésének szükséges, illetve elegendő feltételei.

4. Ajánlott irodalom

- Blahota István: Kalkulus és Maxima, `http://zeus.nyf.hu/~blahota/alkmat/`
- Rodolfo Toledo jegyzetei: `https://rodolfotoledo.progterv.hu/learning_materials`
- Lajkó Károly: Analízis I-II.
- Denkinger Géza: Analízis
- Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai
- Császár Ákos: Valós analízis I.
- Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Valós analízis I.
- Terence Tao – Analysis I.

5. Egyéb elvárások

Minden egyéb tekintetben, amelyre jelen tantárgyi tájékoztató nem tér ki, a Nyíregyházi Egyetem Tanulmányi és Vizsgaszabályzata, illetve a Nyíregyházi Egyetem Etikai Kódexe a mérvadó.

2026. szeptember 10.

Dr. Molnár Gábor Marcell